向量，子空间

徐欢乐

xuhl@dgut.edu.cn

计算机与网络安全学院，9A304

2018.3.6

向量以及基本运算

- $\boldsymbol{R}^n$ 表示n维欧式空间。
- $\boldsymbol{x} \in \boldsymbol{R}^n$，称为$\boldsymbol{R}^n$中的向量，$\boldsymbol{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$。
- 向量内积：$< \boldsymbol{x}$，$\boldsymbol{y} >= \boldsymbol{x}^T y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$

- $\boldsymbol{x}$ 的模长：$\| \boldsymbol{x} \| = \sqrt{\boldsymbol{x}^T \boldsymbol{x}} = (\sum_{i=1}^{n} x_i^2)^{1/2}$
- 向量的距离：$\| \boldsymbol{x} - \boldsymbol{y} \|$
- 三角不等式：$\| \boldsymbol{x} + \boldsymbol{y} \| \le \| \boldsymbol{x} \| + \| \boldsymbol{y} \|$

子空间

- 生成子空间：$span[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^m] = \{x|x = k_1\boldsymbol{x}^1 + k_2\boldsymbol{x}^2 + \cdots + k_m\boldsymbol{x}^m\}$
  - $\dim(span[\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^m]) = rank([\boldsymbol{x}^1, \boldsymbol{x}^2, \ldots, \boldsymbol{x}^m])$

- 线性子空间：$W \subset R^n$，需要满足：
  - $\mathbf{0} \in W$
  - $\forall \boldsymbol{x}_1, \boldsymbol{x}_2 \in W \Rightarrow \boldsymbol{x}_1 + \boldsymbol{x}_2 \in W$
  - $\forall \boldsymbol{x} \in W \Rightarrow k\boldsymbol{x} \in W$

多元函数

- n元函数：$f(\boldsymbol{x}): \mathrm{R}^n \to \mathrm{R}$
    - 线性函数：$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b} = \Sigma\, c_i x_i + \boldsymbol{b}$
    - 二次函数：$f(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$
    $= (1/2)\Sigma\Sigma a_{ij}x_i x_j + \Sigma\, c_i x_i + b$
    - 向量值线性函数：$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} \in \mathrm{R}^m$，其中，A为 m×n矩阵，d为m维向量

多元函数的导数

- 梯度（一阶偏导数向量）：

$$\nabla f(\mathbf{x}) = (\partial f/\partial x_1, \partial f/\partial x_2, \ldots, \partial f/\partial x_n)^{\mathrm{T}} \in \mathrm{R}^n$$

- 线性函数：$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$，$\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}$
- 二次函数：$f(\boldsymbol{x}) = (1/2)\,\boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$
  $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}$
- 向量值线性函数：$F(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{d} \in \mathrm{R}^m$
  $\partial F/\partial x = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

Hessian 矩阵

- Hessian 矩阵（二阶偏导数矩阵）：

$$\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\begin{pmatrix} \partial^2 f/\partial \mathbf{x}_1{}^2 & \partial^2 f/\partial x_2 \partial x_1 & \dots & \partial^2 f/\partial x_n \partial x_1 \\ \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 f/\partial x_2{}^2 & \dots & \partial^2 f/\partial x_n \partial x_2 \\ \dots & \dots & \dots & \\ \partial^2 f/\partial x_1 \partial x_n & \partial^2 f/\partial x_2 \partial x_n & \dots & \partial^2 f/\partial x_n{}^2 \end{pmatrix}$$

- 线性函数：$f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$， $\nabla^2 f(\boldsymbol{x}) = 0$
- 二次函数：$f(\boldsymbol{x}) = (1/2)\, \boldsymbol{x}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{Q}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x} + \boldsymbol{b}$, $\nabla^2 f(\boldsymbol{x})=\boldsymbol{Q}$