线性规划

线性规划模型

例1 某工厂拥有A、B、C 三种类型的设备，生产甲、乙两种产品。每件产品在生产中需要占用的设备机时数、每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数如下表所示。

	产品甲	产品乙	设备能力/h
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润/（元/件）	1500	2500	

线性规划模型

问题：工厂应如何安排生产可获得最大的总利润？

解　设变量x_i为第i种（甲、乙）产品的生产件数（$i=1$，2）。根据题意，我们知道两种产品的生产受到设备能力（机时数）的限制。对设备A，两种产品生产所占用的机时数不能超过65，于是我们可以得到不等式：$3x_1+2x_2\leqslant 65$。

对设备B，两种产品生产所占用的机时数不能超过40，于是我们可以得到不等式：$2x_1+x_2\leqslant 40$。

线性规划模型

对于设备C，两种产品生产所占用的机时数不能超过75，于是我们可以得到不等式：$3x_2 \leqslant 75$；另外，产品数不可能为负，即 $x_1, x_2 \geqslant 0$。同时，我们有一个追求目标，即获取最大利润。于是可写出目标函数z为相应的生产计划可以获得的总利润：$z=1500x_1+2500x_2$。综合上述讨论，在加工时间以及利润与产品产量呈线性关系的假设下，把目标函数和约束条件放在一起，可以建立如下线性规划模型：

线性规划模型

目标函数　Max　$z=1500x_1+2500x_2$

约束条件　s.t.

$$
\begin{cases}
3x_1+2x_2 \leqslant 65 \\
2x_1+x_2 \leqslant 40 \\
3x_2 \leqslant 75 \\
x_1,\ x_2 \geqslant 0
\end{cases}
$$

线性规划模型

这是一个典型的利润最大化的生产计划问题。其中，“Max”是英文单词“Maximize”的缩写，含义为“最大化”；“s.t.”是“subject to”的缩写，表示“满足于…”。因此，上述模型的含义是：在给定条件限制下，求使目标函数z达到最大的x_1，x_2的取值。

线性规划的一般形式

- 一般形式
- 目标函数：

$$\mathrm{Max}\,(\mathrm{Min})\; z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

- 约束条件：

$$\begin{aligned}
&a_{11}x_1+a_{12}x_2+\ldots+a_{1n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant)\, b_1\\
&a_{21}x_1+a_{22}x_2+\ldots+a_{2n}x_n \leqslant (=,\ \geqslant)\, b_2\\
&\qquad\vdots\\
&a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\ldots+a_{mn}x_n \leqslant (=,\ \geqslant)\, b_m
\end{aligned}$$

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n \geqslant 0$$

线性规划的标准形式

- 标准形式
- 目标函数：

$$\text{Min } z = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

- 约束条件：

$$\begin{aligned}
a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n &= b_1 \\
a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n &= b_2 \\
&\vdots \\
a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n &= b_m
\end{aligned}$$

$$x_1, x_2, \ldots, x_n \geqslant 0$$

线性规划的标准形式

可以看出，线性规划的标准形式有如下四个特点：目标最小化、约束为等式、决策变量均非负、右端项非负。

对于各种非标准形式的线性规划问题，我们总可以通过以下变换，将其转化为标准形式。

转化为线性规划的标准形式

1. 极小化目标函数的问题

设目标函数为

$$\text{Max } f = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$$

则可以令 $z = -f$，该极大化问题与下面的极小化问题有相同的最优解，即

$$\text{Min } z = -c_1x_1 - c_2x_2 - \ldots - c_nx_n$$

但必须注意，尽管以上两个问题的最优解相同，但它们最优解的目标函数值却相差一个符号，即

$$\text{Max } f = -\text{Min } z$$

转化为线性规划的标准形式

2.约束条件不是等式的问题

设约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n \leqslant b_i$$

可以引进一个新的变量s，使它等于约束右边与左边之差，即

$$s=b_i-(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n)$$

显然，s 也具有非负约束，即$s \geqslant 0$，这时新的约束条件成为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\ldots+a_{in}x_n+s=b_i$$

转化为线性规划的标准形式

当约束条件为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n \geqslant b_i$$

时，类似地令

$$s=(a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n)-b_i$$

显然，s 也具有非负约束，即 $s\geqslant 0$，这时新的约束条件成为

$$a_{i1}x_1+a_{i2}x_2+\dots+a_{in}x_n-s=b_i$$

转化为线性规划的标准形式

为了使约束由不等式成为等式而引进的变量s称为“松弛变量”。如果原问题中有若干个非等式约束，则将其转化为标准形式时，必须对各个约束引进不同的松弛变量。

转化为线性规划的标准形式

例2 将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\text{Max} \quad f = 3.6x_1 - 5.2x_2 + 1.8x_3$$

$$\text{s.t.} \quad \begin{cases} 2.3x_1 + 5.2x_2 - 6.1x_3 \leqslant 15.7 \\ 4.1x_1 + 3.3x_3 \geqslant 8.9 \\ x_1 + x_2 + x_3 = 38 \\ x_1, x_2, x_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

解 首先，将目标函数转换成极大化：

令 $z = -f = -3.6x_1 + 5.2x_2 - 1.8x_3$

转化为线性规划的标准形式

其次考虑约束，有2个不等式约束，引进松弛变量x_4，$x_5\geqslant 0$。

于是，我们可以得到以下标准形式的线性规划问题：

$$\text{Max}\quad z=-3.6x_1+5.2x_2-1.8x_3$$

$$\text{s.t.}\quad \begin{cases} 2.3x_1+5.2x_2-6.1x_3+x_4=15.7 \\ 4.1x_1+3.3x_3-x_5=8.9 \\ x_1+x_2+x_3=38 \\ x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\geqslant 0 \end{cases}$$

转化为线性规划的标准形式

3. 变量无符号限制的问题

在标准形式中，必须每一个变量均有非负约束。当某一个变量x_j没有非负约束时，可以令

$$x_j = x_j' - x_j''$$

其中

$$x_j' \geqslant 0, \quad x_j'' \geqslant 0$$

即用两个非负变量之差来表示一个无符号限制的变量，当然x_j的符号取决于x_j'和x_j''的大小。

转化为线性规划的标准形式

4. 右端项有负值的问题

在标准形式中，要求右端项必须每一个分量非负。当某一个右端项系数为负时，如 $b_i<0$，则把该等式约束两端同时乘以-1，得到

$$-a_{i1}x_1-a_{i2}x_2-\dots-a_{in}x_n=-b_i$$

转化为线性规划的标准形式

例3　将以下线性规划问题转化为标准形式

$$\text{Max}\quad f=-3x_1+5x_2+8x_3-7x_4$$

$$\text{s.t.}\begin{cases}2x_1-3x_2+5x_3+6x_4\leqslant 28\\4x_1+2x_2+3\ {}_3-9x_4\geqslant 39\\6x_2+2x_3+3x_4\leqslant -58\\x_1,\ x_3,\ x_4\geqslant 0\end{cases}$$

转化为线性规划的标准形式

解　首先，将目标函数转换成极大化：

令 $z=-f=3x_1-5x_2-8x_3+7x_4$

其次考虑约束，有3个不等式约束，引进松弛变量 $x_5, x_6, x_7 \geqslant 0$。

由于 x_2 无非负限制，可令 $x_2=x_2'-x_2''$，其中

$$x_2' \geqslant 0,\quad x_2'' \geqslant 0$$

由于第3个约束右端项系数为-58，于是把该式两端乘以-1。

于是，我们可以得到以下标准形式的线性规划问题：

转化为线性规划的标准形式

$$\text{Min} \quad z = 3x_1 - 5x_2' + 5x_2'' - 8x_3 + 7x_4$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 2x_1 - 3x_2' + 3x_2'' + 5x_3 + 6x_4 + x_5 = 28 \\ 4x_1 + 2x_2' - 2x_2'' + 3x_3 - 9x_4 - x_6 = 39 \\ -6x_2' + 6x_2'' - 2x_3 - 3x_4 - x_7 = 58 \\ x_1,\ x_2',\ x_2'',\ x_3,\ x_4,\ x_5,\ x_6,\ x_7 \geqslant 0 \end{cases}$$

矩阵形式

- 矩阵形式
- 线性规划的标准形式：

$$
(LP)\quad \begin{cases} \text{Min } c^{T}x \\ \text{s.t.}\quad Ax = b \\ \qquad\quad x \geq 0 \end{cases}
$$

其中，

$c, x \in \mathrm{R}^{n}$

$b \in \mathrm{R}^{m}$

A 是 $m \times n$ 矩阵

矩阵形式

- 线性规划的规范形式:

$$(P)\quad \begin{cases} \text{Min}\ \ c^{T}x \\ \text{s.t.}\quad Ax \le b \\ \qquad\quad x \ge 0 \end{cases}$$

其中,

$c\,,x \in \mathrm{R}^{n}$

$b \in \mathrm{R}^{m}$

A 是 $m \times n$ 矩阵

线性规划的最优条件

1.线性规划的理论

考虑(*LP*)的最优性条件

约束多面体 $S=\{x\in R^n \mid Ax=b,\ x\geq 0\}$的极点和极方向。

- 定理1　考虑(*LP*)及上述多面体S，设A满秩，$x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)}$为所有极点，$d^{(1)},d^{(2)},\ldots,d^{(l)}$为所有极方向。那么，

（1）(*LP*)存在有限最优解 $\Leftrightarrow c^{T}d^{(j)}\ne\infty$，$\forall j$。

（2）若(*LP*)存在有限最优解，则最优解可以在某个极点达到。

线性规划的对偶

1. 对偶问题

若前面讲述的例题的设备都用于外协加工，工厂收取加工费。试问：设备 A、B、C 每工时各如何收费才最有竞争力？

设 $\boldsymbol{y}_1$、$\boldsymbol{y}_2$、$\boldsymbol{y}_3$ 分别为加工时设备 A、B、C 的收取费用。

线性规划原问题

例6 某工厂拥有A、B、C 三种类型的设备，生产甲、乙两种产品。每件产品在生产中需要占用的设备机时数、每件产品可以获得的利润以及三种设备可利用的时数如下表所示。求获最大利润的方案。

	产品甲	产品乙	设备能力/h
设备A	3	2	65
设备B	2	1	40
设备C	0	3	75
利润/（元/件）	1500	2500	

线性规划的对偶

$$\text{Max} \quad z = 1500x_1 + 2500x_2$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3x_1 + 2x_2 \leqslant 65 \\ 2x_1 + x_2 \leqslant 40 \\ 3x_2 \leqslant 75 \\ x_1, x_2 \geqslant 0 \end{cases}$$

<u>原问题</u>

$$\text{Min} \quad f = 65y_1 + 40y_2 + 75y_3$$

$$\text{s.t.} \begin{cases} 3y_1 + 2y_2 \geqslant 1500 \\ \text{（不少于甲产品的利润）} \\ 2y_1 + y_2 + 3y_3 \geqslant 2500 \\ \text{（不少于乙产品的利润）} \\ y_1, \ y_2, \ y_3 \geqslant 0 \end{cases}$$

<u>对偶问题</u>

线性规划的对偶

2. 对偶定义

对称形式　　　　　　　　互为对偶

$$(LP)\quad \text{Min}\ \ z = \boldsymbol{c}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{x}$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$$
$$\boldsymbol{x} \geq \mathbf{0}$$

"Min—≥"

$$\Leftrightarrow$$

$$(DP)\quad \text{Max}\ \ \boldsymbol{f} = \boldsymbol{b}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y}$$
$$\text{s.t.}\quad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\boldsymbol{y} \leq \boldsymbol{c}$$

"Max—≤"