

# 运筹与优化作业 1

截止日期: April 6, 2018

March 23, 2018

1. 矩阵  $X, Y \in \mathbb{R}^{m \times m}$  为  $m$  阶正定矩阵, 且  $X - Y$  正定。证明:  $X^{1/2} - Y^{1/2}$  也为正定矩阵。

2. 集合  $S \subset \mathbb{R}^n$  且  $S$  为凸集, 给定  $S$  中的一点  $\mathbf{x}$ , 证明  $\mathbf{x}$  可以表示为  $S$  中至多  $n + 1$  个点的凸组合。

3. 已知

$$A = \begin{pmatrix} 12 & 3 & 6 & 3 & 0 & 0 \\ 8 & 1 & -2 & 0 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{b} = (9, 10, 15)^T.$$

求多面体  $S = \{\mathbf{x} : A\mathbf{x} = \mathbf{b}, \mathbf{x} \geq \mathbf{0}\}$  的所有极点。并用 Matlab 编程求取如下线性规划问题的最优解:

$$\begin{aligned} \min_{\mathbf{x}} \quad & \mathbf{c}^T \mathbf{x} \\ \text{s.t.} \quad & A\mathbf{x} = \mathbf{b} \\ & \mathbf{x} \geq 0 \end{aligned}$$

其中  $\mathbf{c} = (10, 20, 10, 5, 15, d)$ ,  $d$  是你的学号最后两位。

4. 设你的学号最后三位数为  $x$ , 用 matlab 编程生成随机矩阵  $\text{randi}(8 \times x, 5, 5)$ , 并求该随机矩阵的所有元素的和, 以及各行元素的和, 各列元素的和。若该矩阵可逆, 求其逆矩阵。附上代码和最后结果。

5. 定义向量  $\mathbf{y} = (y_1, y_2, \dots, y_m)^T$  的一阶范式  $\|\mathbf{y}\|_1 = \sum_{i=1}^m |y_i|$ , 给定矩阵  $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$  以及向量  $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ 。证明下列优化问题是线性优化问题：

$$\begin{aligned} \max_{\mathbf{y}} \quad & \mathbf{b}^T \mathbf{y} \\ \text{s.t.} \quad & A^T \mathbf{y} \leq \mathbf{0}, \\ & \|\mathbf{y}\|_1 \leq 1. \end{aligned}$$

并写出上述线性规划问题的标准形式 (矩阵形式)。

6. 给定函数  $f(\mathbf{x}) = x_1 - x_2 + 2x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$  和变量的取值范围:  $-1 \leq x_1 \leq 3$ ,  $2 \leq x_2 \leq 6$ 。用梯度下降法编程求取  $f(\mathbf{x})$  的最小值, 请附上你的 Matlab 代码和相关结果。

7. 用二分法求下列方程的根, 并用 MATLAB 实现,

- $x^3 - 2x^2 - 4x = 7$  在  $(3, 4)$  内的根, 精确到 0.00001;
- $x - 2^{-x} = 0$  在  $(0, 1)$  内的根。